Université Abdou Moumouni de Niamey
Faculté des Sciences et Techniques

Année Académique 2021-2022
Section :Mines et Pétrole

Résolution des systèmes linéaires :Méthodes directes et itératives

EXERCICE :1

Soit les systèmes linéaires :

$$(S)\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système linéaire (S) par la méthode de Gauss.
2. Factoriser la matrice A en produit LU.
3. Calculer le déterminant de A.

EXERCICE :2

On considère le système linéaire : $(S_1)AX = B$. avec

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\text{ et }B=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

1. Donner les matrices d'éliminations de Gauss $E^{(1)}$ et $E^{(2)}$ qui permettent de transformer (S_1) en un système (S_2) de la forme $UX = D$ où U est triangulaire supérieure.
2. Vérifier que $E^{(k)} = I + m_k e_k^t$ pour $k = 1, 2$ où $m_k^t = (0, \cdots, 0, -m_{k+1,k}, \cdots, -m_{n,k})$ est le transposé de m_k et
   $e_k^t = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ le transposé du k^{eme} vecteur canonique de $\mathbb{R}^{\ltimes}$.
3. Vérifier que $E^{(1)}E^{(2)} = I + m_1e_1^t + m_2e_2^t$.
4. Déduire $(E^{(1)})^{-1}$; $(E^{(2)})^{-1}$ et $(E^{(2)})^{-1}(E^{(1)})^{-1}$.
5. Décomposer la matrice A sous la forme $A = LU$.
6. Résoudre le système (S_1) par la méthode LU.

EXERCICE :3

On donne la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

1. Former la décomposition LU de A et calculer le déterminant de A.
2. Utiliser la factorisation précédente pour résoudre le système linéaire $Ax = b_i$ avec $b_i = \begin{pmatrix}i\\i\\i\\i\end{pmatrix}$, pour $i = 1, 2, 3$.

EXERCICE :4

Former la décomposition de Cholesky de A et calculer le déterminant de A. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

EXERCICE :5

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de a, A est-elle définie positive ?
2. Écrire la matrice J de l'itération de Jacobi.
3. Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge- t-elle ?
4. Écrire la matrice G de l'itération de Gauss-Seidel.
5. Calculer $\rho(G)$. Pour quelles valeurs de a cette méthode converge-t-elle plus vite que celle de Jacobi ?

EXERCICE :6

On donne le système linéaire suivant, où m est un paramètre réel :

$$\begin{pmatrix} -4 & m & 1 \\ m & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de m les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent-elles ?.
2. Donner les matrices d'itérations de Jacobi et Gauss-Seidel.
3. Résoudre le système par la méthode itérative de Jacobi à partir du vecteur initial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}^t$ jusqu'au vecteur $x^{(3)}$ inclus.
4. Résoudre le système par la méthode itérative de Gauss-Seidel à partir du vecteur initial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}^t$ jusqu'au vecteur $x^{(3)}$ inclus.